

Explizite Potentiale zu gegebenen Streufunktionen geladener Teilchen mit Absorption

Von W. R. THEIS *

Aus dem Institut für Theoretische Physik der E.T.H. Zürich
(Z. Naturforschg. 11 a, 889—891 [1956]; eingegangen am 31. August 1956)

Es werden Potentiale angegeben, deren Streufunktionen zu festem Bahndrehimpuls l aus denjenigen des reinen COULOMB-Potentials durch Multiplikation mit rationalen Funktionen der Wellenzahl hervorgehen. Der Betrag der rationalen Funktion darf ungleich eins gewählt werden, was Absorption entspricht und zu komplexen Potentialen führt.

1. Es sollen im folgenden Potentiale für Streufunktionen $S(k)$ zu festem Bahndrehimpuls l angegeben werden, die sich durch

$$S(k) = e^{2i\eta(k)} \frac{R(k)}{R(-k)} \tag{1}$$

darstellen lassen. Dabei soll sein

$\eta(k)$ = Streuphase des abstoßenden COULOMB-Potentials,

$$R(k) = \frac{\prod_{\mu=1}^n (k - \alpha_{\mu})}{\prod_{\nu=1}^n (k - \beta_{\nu})}; \tag{2}$$

$\alpha_{\mu}, \beta_{\nu}$ alle verschieden; $\Im \alpha_{\mu}, \Im \beta_{\nu} > 0$.

Gilt $R^*(k) = R(-k)$ für reelle k , d. h. ist $|S(k)| = 1$, dann läßt sich die Integralgleichungsmethode von GEL'FAND und LEVITAN^{1,2} anwenden, die das Problem vollständig löst, indem sie eine konstruktive Vorschrift für die Potentiale liefert.

Hier soll jedoch, um mögliche Absorption mit einzubeziehen, wie sie etwa für das optische Modell der Kernstreuung wesentlich ist, und um unabhängig von der allgemeinen Theorie der Eigenwertprobleme zu sein, ein rein algebraischer Weg eingeschlagen werden, indem das Resultat für die Potentiale angegeben und verifiziert wird.

Dazu werde kurz das Nötige für den Fall des reinen COULOMB-Feldes zusammengestellt. Die radiale SCHRÖDINGER-Gleichung der Relativbewegung für den Bahndrehimpuls l lautet dafür in geeigneten Einheiten

$$y''(r) + (k^2 - v(r)) y(r) = 0 \tag{3}$$

* Ständige Anschrift: Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg.

mit

$$v(r) = \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\gamma}{r}, \quad \gamma > 0.$$

Der Term mit γ beschreibt das abstoßende COULOMB-Potential. Gl. (3) hat Lösungen $f(k, r)$ und $\varphi(k^2, r)$ mit den Eigenschaften

$$f(k, r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i(kr - \gamma/k \cdot \log r)} \rightarrow 1; \quad f^*(k, r) = f(-k^*, r) \tag{4}$$

und

$$\varphi(k^2, r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^{l+1}} \rightarrow 1; \quad \varphi^*(k^2, r) = \varphi(k^{2*}, r). \tag{5}$$

Mit den Abkürzungen

$$[u; v] = u(r) v'(r) - u'(r) v(r), \tag{6}$$

$$([u; v] w + [v; w] u + [w; u] v = 0)$$

$$\text{und } f(k) = [f(k, r); \varphi(k^2, r)]; \quad f^*(k) = f(-k^*) \tag{7}$$

folgt, da $[f(k, r); f(-k, r)] = 2ik$ ist:

$$\varphi(k^2, r) = \frac{1}{2ik} \{f(k) f(-k, r) - f(-k) f(k, r)\}. \tag{8}$$

Die im Nullpunkt verschwindende Lösung hat also das asymptotische Verhalten

$$\varphi(k^2, r) \sim e^{i\eta(k)} f(-k) \frac{1}{k} \cdot \sin\{kr - \gamma/k \cdot \log r + \eta(k)\} \tag{9}$$

mit der Streufunktion

$$e^{2i\eta(k)} = \frac{f(k)}{f(-k)}; \quad \eta(k) \text{ reell für reelle } k. \tag{10}$$

2. Für das weitere ist es zweckmäßig, die Schreibweise für den reinen COULOMB-Fall zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} f(k, r) &= f_k, \quad f(-\alpha_{\mu}, r) = f_{\mu}, \\ \varphi(k^2, r) &= \varphi_k, \quad \varphi(\beta_{\nu}^2, r) = \varphi_{\nu}, \end{aligned} \tag{11}$$

¹ J. M. GEL'FAND u. B. M. LEVITAN, Izv. Akad. Nauk, SSSR 15, 309 [1951].

² R. JOST u. W. KOHN, Dan. Mat. Fys. Medd. 27, No. 9 [1953].



$$a_{vk} = [\varphi_v; f_k] \frac{1}{\beta_v^2 - k^2}, \quad a_{v\mu} = [\varphi_v; f_\mu] \frac{1}{\beta_v^2 - \alpha_\mu^2}. \quad (12)$$

Dabei ist k die in (3) auftretende Wellenzahl, α_μ und β_v sind die in (2) definierten Konstanten ($\mu, v = 1, \dots, n$); über doppelt vorkommende Indizes soll künftig summiert werden.

Das Resultat dieser Note läßt sich damit wie folgt formulieren:

Die Streufunktion (1) wird dadurch erhalten, daß man in der erweiterten SCHRÖDINGER-Gleichung

$$y'' + (k^2 - v) y = V y \quad (13)$$

für das Zusatzpotential V die Funktion

$$V = 2(A_v \varphi_v)' \quad (14)$$

wählt, wobei die A_v dem Gleichungssystem

$$A_v a_{v\mu} = -f_\mu \quad (15)$$

genügen sollen.

Der Beweis dieser Behauptung kann über die explizit angebbaren Lösungen von (13), (14) geführt werden. Die Lösung

$$y_k = f_k + A_v a_{vk} \quad (16)$$

läßt sich durch Einsetzen verifizieren. Unter Verwendung von (12) und der aus (3) folgenden Beziehung

$$a'_{vk} = \varphi_v f_k \quad (17)$$

erhält man

$$(A_v a_{vk})'' + (k^2 - v) A_v a_{vk} - 2(A_v' \varphi_v)' (f_k + A_v a_{vk}) = \{A_v'' + (\beta_v^2 - v) A_v - 2(A_v' \varphi_v)' A_v\} a_{vk} = c_v a_{vk},$$

wo c_v als Abkürzung eingeführt ist. Setzt man hierin $k = -\alpha_\mu$, so wird wegen $y_\mu \equiv 0$ (aus (15)) auch $c_v a_{v\mu} \equiv 0$ für alle μ , woraus wegen $\|a_{v\mu}\| \neq 0$ das identische Verschwinden aller c_v folgt, was y_k als Lösung von (13) bestätigt.

Um das Verhalten von (16) im Unendlichen zu untersuchen, setze man (15) ein ($\bar{a}_{v\mu}$ = Unterdeterminante zu $a_{v\mu}$ **):

$$y_k = f_k - f_\mu \frac{\bar{a}_{v\mu} a_{vk}}{\|a_{v\mu}\|} = \frac{f_k}{\|a_{v\mu}\|} \left\| a_{v\mu} - \frac{f_\mu}{f_k} a_{vk} \right\|. \quad (18)$$

** $\text{Det}(\alpha_1 + c_1 b, \dots, \alpha_\mu + c_\mu b, \dots)$

$$= \text{Det}(\alpha_1, \dots, \alpha_\mu, \dots)$$

$$+ \sum_{\mu} c_\mu \text{Det}(\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu-1}, b, \alpha_{\mu+1}, \dots)$$

$$= \|a_{v\mu}\| + c_\mu \bar{a}_{v\mu} b_v.$$

Wegen (12), (8), (4) und $\Im m \beta > 0$ gilt asymptotisch für große r

$$a_{v\mu} - \frac{f_\mu}{f_k} a_{vk} \sim a_{v\mu} \left\{ 1 - \frac{f_\mu}{f_k} \frac{\beta_v^2 - \alpha_\mu^2}{\beta_v^2 - k^2} \frac{[f(\beta_v, r); f_k]}{[f(\beta_v, r); f_\mu]} \right\} \\ \sim a_{v\mu} \frac{k + \alpha_\mu}{k + \beta_v}$$

und daher

$$y_k \sim f_k \frac{\prod_1^n (k + \alpha_\mu)}{\prod_1^n (k + \beta_v)} = f_k R(-k).$$

Somit ist

$$F(k, r) = \frac{1}{R(-k)} y_k \quad (19)$$

diejenige Lösung von (13), die das asymptotische Verhalten (4) besitzt.

Die im Nullpunkt verschwindende Lösung von (13) erhält man in Analogie zu (8):

$$\Phi(k^2, r) = \frac{1}{2ik} \{f(k) y_{-k} - f(-k) y_k\} \\ = \varphi_k + A_v b_{vk} = \frac{\varphi_k}{\|a_{v\mu}\|} \left\| a_{v\mu} - \frac{f_\mu}{\varphi_k} b_{vk} \right\| \quad (20)$$

$$\text{mit} \quad b_{vk} = [\varphi_v; \varphi_k] \frac{1}{\beta_v^2 - k^2}. \quad (21)$$

Für $r \rightarrow 0$ verschwindet nämlich in

$$a_{v\mu} - \frac{f_\mu}{\varphi_k} b_{vk} = a_{v\mu} \left\{ 1 - \frac{f_\mu}{\varphi_k} \frac{b_{vk}}{a_{v\mu}} \right\}$$

der zweite Summand in der Klammer, denn es gilt nach (6)

$$\frac{f_\mu}{\varphi_k} \frac{[\varphi_v; \varphi_k]}{[\varphi_v; f_\mu]} = 1 - \frac{\varphi_v}{\varphi_k} \frac{[\varphi_k; f_\mu]}{[\varphi_v; f_\mu]},$$

und dieser Ausdruck geht wegen $\frac{\varphi_v}{\varphi_k} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 1$ und $[\varphi_k; f_\mu] \xrightarrow{r \rightarrow 0} f(-\alpha_\mu)$ [vgl. (7)] gegen Null, falls $f(-\alpha_\mu) \neq 0$; für das abstoßende COULOMB-Potential treten aber keine gebundenen Zustände auf, und also ist $f(k) \neq 0$ für $\Im m k < 0$. Daher gilt

$$\Phi(k^2, r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \varphi(k^2, r).$$

Setzt man (19) in (20) ein, so erhält man

$$\Phi(k^2, r) = \frac{1}{2ik} \{f(k) R(k) F(-k, r) - f(-k) R(-k) F(k, r)\}, \quad (21)$$

woraus unmittelbar wie in (9), (10) die Streufunktion (1)

$$S(k) = \frac{f(k) R(k)}{f(-k) R(-k)} = e^{2i\eta(k)} \frac{R(k)}{R(-k)}$$

folgt.

Damit ist gezeigt, daß das Potential (14) die Streufunktion (1) zur Folge hat. Man kann noch (15) in (14) einsetzen und erhält wegen (17)

$$V = -2 \left(\frac{\bar{a}_{\nu\mu} f_{\mu} \varphi_{\nu}}{\|a_{\nu\mu}\|} \right)' = -2 \left(\frac{\bar{a}_{\nu\mu} a'_{\nu\mu}}{\|a_{\nu\mu}\|} \right)',$$

$$V = -2 \frac{d^2}{dr^2} \log \|a_{\nu\mu}\|. \quad (22)$$

Hat die Determinante Nullstellen, so wird das Potential dort wie $(r-r_0)^{-2}$ singulär. Ohne Absorption gibt es jedoch keine Nullstellen, weil $\|a_{\nu\mu}\|$ dann die FREDHOLMSche Determinante einer Integralgleichung ist, deren zugehörige homogene Gleichung nur die triviale Nulllösung besitzt (vgl. die Gln. (1.24) bis (1.29) in der anfangs zitierten Arbeit²).

3. Die obigen Resultate könnten folgende Anwendung finden. Ist für einen bestimmten Bahndrehimpuls l die Streufunktion experimentell bekannt (bzw. kann sie über den experimentell bekannten Teil hinaus sinnvoll extrapoliert werden), dann kann man sie durch eine rationale Funktion mit wachsendem Grade immer genauer annähern. In

Gl. (22) hat man explizit ein Potential, das diese Streufunktion liefert. Die Elemente $a_{\nu\mu}$ der Determinante sind durch Differentiationsprozesse an bekannten Funktionen zu gewinnen. Im Falle von geladenen Teilchen sind es die COULOMB-Funktionen, bei neutralen die elementar ausdrückbaren halbzahligen Zylinderfunktionen. Besonders einfach ist natürlich die s -Streuung ($l=0$) ungeladener Teilchen. Sieht man von der Absorption ab, so sind die Potentiale in diesem wichtigen Spezialfall schon vor längerer Zeit von BARGMANN³ angegeben worden. Die Berücksichtigung der Absorption erweitert das Anwendungsgebiet. Während ohne diese nur solche Streuzentren erfaßt werden können, deren innere Struktur sich bei der Streuung nicht bemerkbar macht, können mit Absorption auch allgemeinere Streuzentren betrachtet werden, indem die innere Struktur, sofern sie bei der Streuung eine Rolle spielt, als komplexer Anteil des Potentials berücksichtigt werden kann.

Herrn Professor R. JOST möchte ich herzlich danken für seinen großen Anteil an der vorliegenden Note, die aus Diskussionen mit ihm entstanden ist. Herrn Professor W. PAULI bin ich zu größtem Dank verpflichtet für die freundliche Aufnahme und Förderung an seinem Institut. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für finanzielle Unterstützung.

³ V. BARGMANN, Rev. Mod. Phys. **21**, 488 [1949].